数理解析研究所講究録
第 1558 巻 2007 年 75-81

Maxwell-Schrödinger 方程式について

熊本大学工学部　　和田健志

§1. 序

ここではミクロな, しかし非相対論的な荷電粒子の運動及びそれによって引き起こされる電磁場の時間発展を記述する方程式である Maxwell-Schrödinger 方程式系 (MS) すなわち, $(u,\phi,A):\boldsymbol{R}^{1+3}\to\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}^{3}$ を未知関数として

$$i\partial_t u=-\frac{1}{2}(\nabla-iA)^2u+\phi u, \tag{1.1}$$

$$-\Delta\phi-\partial_t\operatorname{div}A=\rho, \tag{1.2}$$

$$\Box A+\nabla(\partial_t\phi+\operatorname{div}A)=J \tag{1.3}$$

と表されるものについて考える. ここで $\rho=|u|^2$, $J=\operatorname{Im}\bar{u}(\nabla-iA)u$ である. 物理的には, u は荷電粒子の運動を記述する波動関数, (ϕ,A) は電磁ポテンシャル, ρ は電荷密度, J は電流密度であるが, ρ,J をそれぞれ電荷, 電流の密度と考えてよいのは以下の事情による. まず, ρ は本来荷電粒子の存在確率の密度関数であるが, 電荷密度をこれで代用することは自然である. 次に ρ と J の間には (1.1) により $\partial_t\rho+\operatorname{div}J=0$ の関係がある. これは電磁気学における電荷保存則と全く同じ式であるので J を電流密度 (本来は確率の流れなのであるが) と解釈する.

この方程式は少なくとも二つの保存量を持つ. その一つは電荷保存則の積分形

$$\|u(t)\|_2=\text{const} \tag{1.4}$$

であり, もう一つはエネルギー保存則

$$\|(\nabla-iA)u\|_2{}^2+\|\nabla\phi+\partial_tA\|_2{}^2+\|\operatorname{rot}A\|_2{}^2=\text{const} \tag{1.5}$$

である. エネルギーの定義式において第 1 項は粒子の運動エネルギー, 第 2, 第 3 項はそれぞれ電場, 磁場のエネルギーである.

次にこの方程式の持つゲージ不変性について説明する. $\lambda:\boldsymbol{R}^{1+3}\to\boldsymbol{R}$ を任意の関数とし, ゲージ変換

$$(u',\phi',A')=(\exp(i\lambda)u,\phi-\partial_t\lambda,A+\nabla\lambda) \tag{1.6}$$

を考えると, この変換で方程式は不変に保たれる. よって, λ の取り方を変えれば, (MS) の初期値問題の解は一意でないことがわかる. この不定性は未知関数自身は観測可能量でないことに由来する. 実際に観測されるのは ρ,J や電場 $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi-\partial_tA$, 磁場 $\boldsymbol{B}=\operatorname{rot}A$ 等のゲージ不変な量なのである. この不定性をのぞくために, ゲージ条件と呼ばれるもう

一つの条件を課して考える（数学的にはゲージ同値な関数の類から代表元を取り出す方法を指定することに相当する）．よく知られたゲージ条件として Coulomb ゲージ

$$\operatorname{div} A = 0 \tag{1.7}$$

がある．（方程式からこの式は時間不変になっていることに注意）この条件の下で (1.2)-(1.3) は

$$-\Delta\phi = \rho, \quad \Box A = PJ \tag{1.8}$$

に帰着する．ここで $P = 1 - \nabla \operatorname{div} \Delta^{-1}$ はソレノイダルな部分空間への射影である．最初の式は Newton ポテンシャルを用いて $\phi = (4\pi|x|)^{-1} * \rho$ と解けるので実際には未知関数は u, A である．(1.1) と (1.8) の連立系を以後 (MS-C) と書く．(MS-C) を解くには初期データ $(u(0), A(0), \partial_t A(0))$ を Sobolev 空間

$$X^{s,\sigma} = \{(u_0, A_0, A_1) \in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \operatorname{div} A_0 = \operatorname{div} A_1 = 0\}$$

に与えて解けばよい．ゲージ条件としては Lorentz ゲージ

$$\partial_t\phi + \operatorname{div} A = 0 \tag{1.9}$$

もよく知られており，このゲージのもとでは (1.2)-(1.3) は

$$(\partial_t^2 - \Delta)\phi = \rho, \quad \Box A = J \tag{1.10}$$

となる．(1.1) と (1.10) との連立系を (MS-L) と書く．この場合は初期データ

$$(u(0), \phi(0), \partial_t\phi(0), A(0), \partial_t A(0))$$

を Sobolev 空間

$$\begin{aligned} Y^{s,\sigma} = \{(u_0, \phi_0, \phi_1, A_0, A_1) &\in H^s \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1} \oplus H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}; \\ &\operatorname{div} A_0 + \phi_1 = \operatorname{div} A_1 + \Delta\phi_0 + |u_0|^2 = 0\} \end{aligned}$$

に与えて解けばよい． 以後，断り無しに s, σ というときはそれぞれ (MS) における Schrödinger 部分，Maxwell 部分の regularity を表しているとする．

§2. 初期値問題の可解性

(MS-C) および (MS-L) の可解性を考察する上で最大の問題点は (1.1) に含まれる $iA\cdot\nabla u$ という項が所謂 derivative loss を生じる可能性があることである．従って通常の非線形 Schrödinger 方程式の場合のような Strichartz 評価を用いた解の構成法を適用することができない．また非線形項が微分を含む場合は一般に解そのもののアプリオリ評価よりも解の差の評価がより困難になるので一意性を示すために必要な regularity が高くなる傾向がある．時間局所解の一意存在は最初 Nakamitsu-Tsutsumi [11] により $s = \sigma > 5/2$

の場合に証明されたが, そこでは L^2 をベースとするエネルギー評価の方法が用いられている[1]. この結果は最近 Nakamura-Wada [12] により次のように拡張された.

定理 1. $s \geq 5/3$, $\max\{4/3; s-2; (2s-1)/4\} \leq \sigma \leq \max\{s+1; (5s-2)/3\}$ とし, さらに $(s,\sigma) \neq (5/2, 7/2), (7/2, 3/2)$ とする. このとき, 任意の初期データ $(u(0), A(0), \partial_t A(0)) \in X^{s,\sigma}$ に対して (MS-C) の時間局所解で $(u, A, \partial_t A)$ が $X^{s,\sigma}$ において連続となるものがただ一つ存在する.

上記 [12] においては初期データに関する連続依存性も証明されているがそれは局所 Lipschitz 連続性ではなく各点連続性である. 証明の鍵は通常の H^s におけるエネルギー評価の代わりに $\partial_t u$ を H^{s-2} において評価することにある. また, $s = \sigma = 1$ の場合の時間大域解の存在が Guo-Nakamitsu-Strauss [7] により示されているが一意性は証明できていない. それは証明がエネルギー保存則を利用したコンパクト性の手法によるからである. 大域解の一意性, 及び爆発解の存在に関しては本研究集会時点では未解決であったが, その後定理 1 で得られた解は時間大域的であることが示された [13]. 証明には加藤淳氏の講演でも出てきた Kenig-Koenig 型の Strichartz 評価 [9, 10] が用いられる. 但し [7] の解が一意かどうかは未解決である.

§3. 散乱理論

(MS-C) に対する散乱理論について説明する. 散乱理論の主要な問題は波動作要素の存在及び完全性を証明することであるが, 大域解の一意存在がごく最近まで得られていなかったことからもわかるように既存の結果はすべて波動作要素の構成に関するものである. (MS-C) は Coulomb ポテンシャルに対する Hartree 方程式と同じく, 非線形相互作用が短距離型と長距離型の境目になっており, いわゆる修正漸近状態を考える必要がある. (Hartree 方程式に対する散乱理論については [1, 2, 8, 14, 15] 等を参照) (MS-C) に対する散乱理論は最初 Tsutsumi [21] で論じられその後 Shimomura [17], Ginibre-Velo [4, 6] などによって拡張された. それについて説明するため以下の記号を導入する: $U(t) = \exp(it\Delta/2), M(t) = \exp(i|x|^2/2t), D_0(t)f = f(\cdot/t), D(t) = (it)^{-3/2}D_0(t)$. また与

[1] 実際には [11] は一般次元における (MS-L) を取り扱っているが, その方法はほぼそのまま 3 次元の (MS-C) に適用できる. また regularity については 3 次元の場合 $s = \sigma \geq 3$ を仮定しているが, 非整数階の Sobolev 空間やよく知られた交換子評価を用いると $s = \sigma > 5/2$ までは容易に改善できる.

えられた $(u_+, A_+, \dot{A}_+)$ に対して次のように定義する:

$$u_0(t) = MD\exp(-iS(t))\hat{u}_+, \quad A_0(t) = \cos t\omega\, A_+ + \frac{\sin t\omega}{\omega}\dot{A}_+,$$

$$\tilde{A}_1 = \int_1^\infty \frac{\sin(\nu-1)\omega}{\omega} D_0(\nu)P(x|\hat{u}_+|^2)\frac{d\nu}{\nu^{-3}}, \quad A_1(t) = t^{-1}D_0(t)\tilde{A}_1,$$

$$S(t) = (\phi(\hat{u}_+) - x\cdot\tilde{A}_1)\log t.$$

ただし $\phi(\hat{u}_+) = (4\pi|x|)^{-1} * |\hat{u}_+|^2$ である. おおざっぱに言えば, 上のように u_0, A_0, A_1 を定めれば $(u_0, A_0 + A_1)$ に漸近する (MS-C) の解 (u, A) を $t = \infty$ の近傍で構成できる, と言うことになる. 正確には以下のようになる. 関数空間 $X(T)$ のノルムを

$$\|(v,B); X(T)\| = \sup_{t\geq T} t(\log t)^2\{\|v(t); H^2\| + \|\partial_t v(t)\|_2 + \|v; L^{8/3}(t,\infty; W^{1,4})\| + \|B; L^4(t,\infty;W^{1,4})\| + \|\partial_t B; L^4(t,\infty;L^4)\|\}$$

と定める. すると以下が成り立つ:

定理 2 ([6]). $u_+ \in H^{3,1}\cap H^{1,3}$ は十分小さいとする. また $\operatorname{div} A_+ = \operatorname{div}\dot{A}_+ = 0$ とし, さらに $\Delta A_+, \nabla\dot{A}_+, \Delta(x\cdot A_+), \nabla x\cdot\dot{A}_+ \in W^{1,1}$ および $A_+, x\cdot A_+ \in L^3$, $\dot{A}_+, x\cdot\dot{A}_+ \in L^{3/2}$ を仮定する. このとき十分大きい $T > 1$ に対して (MS-C) の解 (u, A) で $(u-u_0, A-A_0-A_1) \in X(T)$ となるものがただ一つ存在する.

定理2における $(u_+, A_+, \dot{A}_+)$ に $(u(0), A(0), \partial_t A(0))$ を対応させる写像を (正の向きの) 波動作用素と呼び, W_+ で表す. $t \to -\infty$ においても同様の定理が得られるので W_- も同じように定義できる. さらに, もし ${W_+}^{-1}$ が定義できれば $S = {W_+}^{-1}\circ W_-$ は時刻 $-\infty$ における状態に時刻 ∞ における状態を対応させる写像となる. この S を散乱作用素と呼ぶ.

上の定理のように位相の修正を入れるとうまくいく理由について少し説明しておく. Maxwell 部分 A の第一近似は与えられた終状態 A_0 であるが, これだけでは Schrödinger 部分 u の挙動を調べるには十分でない. そこで u の第一近似が上記 u_0 の形であると仮定して (位相の修正 S は未定でよい) これを J に代入し, その主要部を見ることにより A の第二近似は A_1 であることがわかる. そこで $u = u_0 + v$, $A = A_0 + A_1 + B$ とおいて (MS-C) を (v, B) の方程式に書き換えると

$$\mathscr{L}v = \mathscr{N}(u,A) - \mathscr{N}(u_0, A_0 + A_1) + \mathscr{N}(u_0, A_0+A_1) - \mathscr{L}u_0 \tag{3.1}$$

$$\Box B = J - t^{-3}D_0(t)P(x|\hat{u}_+|^2) \tag{3.2}$$

となる. 但し $\mathscr{L} = i\partial_t + \frac{1}{2}\Delta$, $\mathscr{N}(u,A) = iA\cdot\nabla u + |A|^2u + \phi(u)u$ である. この方程式を縮小写像の原理を用いて $t = \infty$ の近傍で解けばよい. そのためには (3.1) の右辺が $t \to \infty$ で十分速く減衰する必要がある. (v, B) は $X(T)$ の元であるから (v, B) は $(u_0, A_0 + A_1)$

に比べて速く減衰し, 従って $\mathscr{N}(u,A)-\mathscr{N}(u_0,A_0+A_1)$ は十分速く減衰する. 故に方程式 (3.1)-(3.2) を解くには $\mathscr{N}(u_0,A_0+A_1)-\mathscr{L}u_0$ が十分速く減衰する必要があり, そうなるように位相の修正 S をうまく選ぶ. 実際に計算してみると

$$\begin{aligned}\mathscr{N}(u_0,A_0+A_1)-\mathscr{L}u_0 &= -t^{-1}x\cdot A_0u_0+t^{-1}MD(-x\cdot\tilde{A}_1+\phi(\hat{u}_+))e^{-iS}\hat{u}_+\\ &\quad -MD\partial_tSe^{-iS}\hat{u}_+ + (\text{速く減衰する項})\end{aligned} \tag{3.3}$$

となるので S が上記のように定義してあれば右辺の第 2, 第 3 項は打ち消しあう. また第 1 項は $-A_0\cdot MDxe^{-iS}\hat{u}_+$ と書き換えて波動方程式の L^∞-L^1 評価を利用すると L^2 において $O(t^{-1})$ である. 従って減衰が遅い様に見える. またこれは位相の修正によっても消せない項である. そこでこの項は以下のように処理する. Coulomb ゲージ条件のもとでは $\Box x\cdot A_0=0$ であるから定理の仮定の下波動方程式の L^∞-L^1 評価を利用すると $\|t^{-1}x\cdot A_0u_0;H^2\|=O(t^{-2}(\log t)^2)$ となる. よって第 1 項は十分速く減衰することがわかる. Tsutsumi [21] はこの項の処理のためやや不自然な条件 $\operatorname{supp}\hat{u}_+\cap\{\xi;1-\epsilon<|\xi|<1+\epsilon\}=\emptyset$ を仮定していた. これは u_0 の台が光錐から離れているという条件であり, これを用いて $x\cdot A_0u_0$ が十分速く減衰することを示している. また Shimomura [17] は u の第 2 近似を導入することにより [21] における仮定をのぞいている. 両氏が上に書いたような論法をとらなかったのは Lorentz ゲージにおいても通用する散乱理論の構築法を目指していたためと思われる.

類似の問題としては 2 次元における Klein-Gordon-Schrödinger 方程式, 3 次元における wave-Schrödinger 方程式の散乱理論がある. これらについては [3, 5, 16, 18–20] などを参照されたい.

§4. 光速無限大での極限

(MS) は本来パラメタとして光速 c をふくむ (§1-§3 においてはこれを 1 としている):

$$\begin{gathered}i\partial_tu=-\frac{1}{2}(\nabla-ic^{-1}A)^2u+\phi u,\\ -\Delta\phi-c^{-1}\partial_t\operatorname{div}A=\rho,\\ (c^{-2}\partial_t^2-\Delta)A+\nabla(c^{-1}\partial_t\phi+\operatorname{div}A)=c^{-1}J.\end{gathered}$$

ただし $J=\operatorname{Im}\bar{u}(\nabla-ic^{-1}A)u$ である. $c\to\infty$ において形式的には (MS) は Hartree 方程式

$$i\partial_tu=-\frac{1}{2}\Delta u+\phi u,\quad -\Delta\phi=\rho \tag{H}$$

に近づくが実際に (MS) の解が (H) の解に収束するかどうかは証明を要する. この問題の解がここでの主結果である. ここでは, 以下を仮定する.

(A1) $s \geq 5/3$, $\max\{4/3, s-1, (s+2)/3\} \leq \sigma \leq \min\{s+1, (5s-2)/3\}$ である. 但し $(s,\sigma) \neq (5/2, 7/2), (5/2, 3/2)$ とする.

(A2) (u_c, A_c) は $(u_c, A_c, c^{-1}\partial_t A_c) \in C(I_c; X^{s,\sigma})$ であるような (MS-C) の一意な解である. ここで I_c は解の接続により得られる最大時間区間であり, 0 を含むとする.

(A3) $v \in C(\boldsymbol{R}; H^s)$ は (H) の解である.

(A4) $\lim_{c\to\infty} \|u_c(0) - v(0); H^s\| = 0$ である.

(A5) $H^\sigma \oplus H^{\sigma-1}$ において $\lim_{c\to\infty}(A_c(0), c^{-1}\partial_t A_c(0))$ が存在する.

上記の仮定 (A1)-(A5) のもとで, 以下が成り立つ:

定理 3. 時刻 0 を含む区間 $I \subset I_c$ が存在し,

$$\lim_{c\to\infty} \|u_c - v; L^\infty(I; H^s)\| = 0 \tag{4.1}$$

が成り立つ.

詳細については [22] を参照されたい.

References

[1] J. Ginibre and T. Ozawa: *Long range scattering for nonlinear Schrödinger and Hartree equations in space dimension $n \geq 2$*, Comm. Math. Phys. **151** (1993), 619–645.

[2] J. Ginibre and G. Velo: *Long range scattering and modified wave operators for some Hartree type equations I*, Rev. Math. Phys. **12** (2000), 361–429.

[3] , J. Ginibre and G. Velo: *Long range scattering and modified wave operators for the wave-Schrödinger system*, Ann. Henri Poincaré, **3** (2002), 537–612.

[4] J. Ginibre and G. Velo: *Long range scattering and modified wave operators for the Maxwell-Schrödinger system. I. The case of vanishing asymptotic magnetic field*, Comm. Math. Phys., **236**, (2003), 395–448.

[5] J. Ginibre and G. Velo: *Long range scattering and modified wave operators for the wave-Schrödinger system. II*, Ann. Henri Poincaré, **4** (2003), 973–999.

[6] J. Ginibre and G. Velo: *Long range scattering for the Maxwell-Schrödinger system with large magnetic field data and small Schrödinger data*, preprint, math.AP/0407017.

[7] Y. Guo, K. Nakamitsu, W. Strauss: *Global finite-energy solutions of the Maxwell-Schrödinger system*, Comm. Math. Phys. **170** (1995), 181–196.

[8] N. Hayashi and P. I. Naumkin: *Asymptotic behavior in time of solutions to the nonlinear Schrödinger and Hartree equations*, Amer. J. Math. **120** (1998), 369–389.

[9] J. Kato: *Existence and uniqueness of the solution to the modified Schr?dinger map*. Math. Res. Lett. **12** (2005), 171–186.

[10] C. E. Kenig and K. D. Koenig: *On the local well-posedness of the Benjamin-Ono and modified Benjamin-Ono equations*, Math. Res. Lett., **10** (2003), 879–895.

[11] K. Nakamitsu, M. Tsutsum: *The Cauchy problem for the coupled Maxwell-Schrödinger equations*, J. Math. Phys. **27** (1986), 211–216.

[12] M. Nakamura, T. Wada: *Local well-posedness for the Maxwell-Schrödinger equation*, Math. Ann. **332** (2005), 565–604.

[13] M. Nakamura, T. Wada: *in preparation.*

[14] K. Nakanishi: *Modified wave operators for the Hartree equation with data, image and convergence in the same space*, Commun. Pure Appl. Anal., **1** (2002), 237– 252.

[15] T. Ozawa: *Long range scattering for nonlinear Schrödinger equations in one space dimension*, Comm. Math. Phys. **139** (1991), 479–493.

[16] T. Ozawa and Y. Tsutsumi: *Asymptotic behavior of solutions for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations*, Spectral and scattering theory and applications, Adv. Stud. Pure Math., **23** (1994), 295–305.

[17] A. Shimomura: *Modified wave operators for Maxwell-Schrödinger equations in three space dimensions*, Ann. Henri Poincaré, **4**, (2003) 661–683.

[18] A. Shimomura: *Modified wave operators for the coupled wave-Schrödinger equations in three space dimensions*, Discrete Contin. Dyn. Syst., **9** (2003), 1571–1586.

[19] A. Shimomura: *Scattering theory for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations in two space dimensions*, J. Math. Sci. Univ. Tokyo, **10** (2003), 661–685.

[20] A. Shimomura: *Scattering theory for the coupled Klein-Gordon-Schrödinger equations in two space dimensions. II*, Hokkaido Math. J., **34** (2005), 405–433.

[21] Y. Tsutsumi: *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Maxwell-Schrödinger equations in three space dimensions*, Comm. Math. Phys., **151**,(1993) 543–576.

[22] T. Wada: *Limit Problem for the Maxwell Schrödinger system*, 第5回東アジア偏微分方程式会議講究録掲載予定.